ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы

Вариант 1

Задание №1

В качестве измерения времени возьмем минуту, скорость будем измерять в км/мин. Тогда 18 сек $= \frac{18}{60} = 0{,}3$ мин.

Скорость $108\frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{108}{60} = 1{,}8\ \text{км/мин}$. Обозначим скорость встречного поезда x км/мин. По условиям задачи получим равенство:

$$0{,}3 \cdot 1{,}8 + \mathrm{x} \cdot 0{,}3 = 0{,}9$$

Отсюда $\mathrm{x} = \frac{0{,}36}{0{,}3} = 1{,}2\ \text{км/мин}$. А тогда скорость в км/час будет:

$$1{,}2 \cdot 60 = 72\ \text{км/час}$$

Ответ: 72 км/час

Задание №2

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Эта функция определена при $\mathrm{x} > 0$ и имеет наибольшее значение при $\mathrm{x} = \mathrm{e}$. Значит $f(\pi) < f(\mathrm{e})$ или $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{1}{\mathrm{e}} => \mathrm{e}^{\pi}$.

Ответ: первое число больше

Задание №3

Данное уравнение можно записать в виде:$abc = ab + ac + bc$, где $\mathrm{a} = \log_{\frac{1}{2}} x$, $b = \log_2 x$, $c = \log_5 x$.

Разделив уравнение на левую часть, получим:

$1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} => 1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} <=> 1 = \log_x 5 + \log_x 2 + \log_x \frac{1}{2} =$

$= \log_x 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \log_x 5$

Отсюда $x = 5$. Заметим, что $x = 1$ также корень этого уравнения.

Ответ:$\{1; 5\}$

Задание №4

Сделаем замену $x - 2 = X, y - 1 = Y$. Тогда в новой системе координат центр будет в точке $(2; 1)$. Область $|X| + |Y| = 2$ будет симметрична по двум осям и представлять собой квадрат с диагоналями 4. Площадь этого квадрата равна $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Ответ: $\{8\}$

Задание №5

Группируя слагаемые, получим:

$(|x-1|^2 + 1)(y^2 + 1) = 4y|x-1|$. Делим обе части на $y|x-1|$

(x $= 1$ не является корнем уравнения так же как $y = 0$).

Получим $(|x-1| + \frac{1}{|x-1|})\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4$. Но при a$> 0$ a $+ \frac{1}{\text{a}} \geq 2$. Поэтому равенство возможно если $|x-1| = 1, y = 1$. Следовательно, имеем x $= 0$, x $= 2$. Поэтому решение будет $(0; 1)$ и $(2; 1)$. Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $(0; 1)$ и $(2; 1)$

Задание №6

Обозначим arctg2 + arctg3 через α. Тогда $\text{tg}a = tg(\text{ arctg}2 + \text{arctg}3) = \frac{\text{tg(arctg}2)+\text{tg(arctg}3)}{1-\text{tg(arctg}2)\cdot\text{tg(arctg}3)} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$. Теперь надо найти α, зная что $\text{tg}\alpha = -1$.

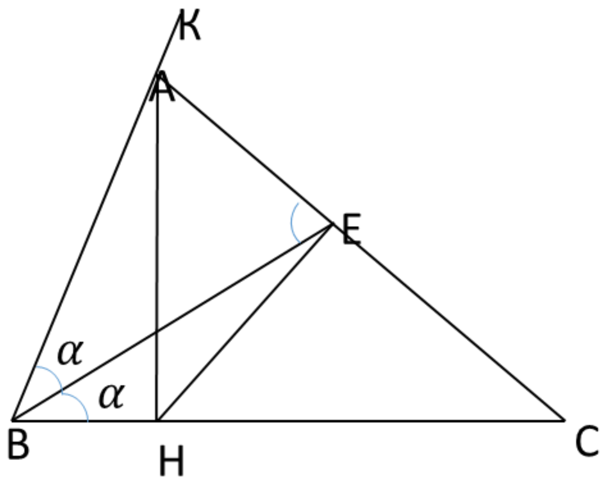
Так как $\frac{\pi}{4} < \text{ arctg}2 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < \text{ arctg}3 < \frac{\pi}{2}$, то получаем что

$\frac{\pi}{2} < \text{arctg}2 + \text{arctg}3 < \pi$, т. е. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. А тогда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Ответ: $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

Задание №7

Пусть ABC данный треугольник, в котором AH – высота, BE – биссектриса угла B. Угол BEA = 45°. Найти угол EHC.



Решение: Обозначим ∠B=2a. Покажем, что AC есть биссектриса внешнего угла A. Имеем:

$\angle HAC = \angle BAC - \angle HAE.$ Но $\angle BAE$
$= 180° - \alpha - 45°$
$= 135° - \alpha$

Отсюда находим, что

$\angle HAC = 135° - \alpha - 90° + 2\alpha = 45° + \alpha$

Поэтому

$\angle CAK = 135° - \alpha - 90° + 2\alpha = 45° + \alpha$. Значит AC – биссектриса угла HAK. Через точку E проходит три прямые: AC, BE и HE. Поэтому HE – также биссектриса угла H. Значит $\angle EHC = 45°$

Ответ: 45°

Задание №8

Решение:

Так как знаменатель дроби имеет вид $a - |a|$, где $a = 3 - 4x$, то при $a \geq 0$ он обращается в нуль, а при $a < 0$ он отрицателен. Поэтому имеем:

$$\begin{cases} 3 - 4x < 0 \\ \log_7(19 - 16|x| \cdot x) - \log_{49}(1 - 4x)^2 \geq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \log_7(19 - 16x|x|) \geq \log_7|1 - 4x| \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \log_7(19 - 16x^2) \geq \log_7(1 - 4x) \end{cases} <=> \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 19 - 16x^2 \geq 4x - 1 \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 4x^2 + x - 5 \leq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x \in \left[-\frac{5}{4}; 1\right] \end{cases} \leq> x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$$

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{4}; 1\right]$

Задание №9

Известно, что $|x-a|$ есть расстояние от т. x до точки a. Данное неравенство перепишем в виде: $|x-a^2|+|x-(2a-2)| \leq 1$

Рассмотрим на числовой прямой точки $2a-2$ и a^2. Тогда слева стоит выражение равное сумме расстояний x от двух точек a^2 и $2a-2$

Но $|a^2-2a+2| = (a-1)^2+1$; т.е. расстояние между точками a^2 и $2a-2$

больше или равно 1. Тогда очевидно, что это неравенство будет выполняться тогда и только тогда когда $x \in [2a-2, a^2\,]$ а длина этого отрезка равна 1, т.е.

$a = 1$ поэтому решение будет только при $a = 1$ $x \in [0{,}1\,]$. При других а решений нет.

Ответ: $a = 1$ $x \in [0{,}1\,]$. При других а решений нет.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы

Вариант 2

Задание №1

Пусть x – скорость пассажира, y – скорость эскалатора. Обозначим за 1 длину пути эскалатора. По условиям задачи получаем $\frac{1}{x+y} = 24$, $\frac{1}{x} = 42$. Делим второе уравнение на первое получим $\frac{42}{24} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} => y = \frac{3}{4}x$ или $x = \frac{4y}{3}$. Подставляем в первое уравнение и находим, что $\frac{1}{7y} = 8 => \frac{1}{y} = 56$.

Ответ: 56 сек

Задание №2

Функция $y = \frac{\ln x}{x}$, как известно, имеет наибольшее значение при $x = e$

Значит $\frac{1}{\mathrm{e}} > \frac{\ln 3}{3} => \mathrm{e}^3 > 3^{\mathrm{e}}$

Ответ: первое число (слева) больше второго

Задание №3

Обозначим $\log_2 x = a,\ \log_3 x = b,\ \log_4 x = \text{c},\ \log_5 x = d.$ Тогда уравнение будет иметь вид:

$abcd = fdc + bcd + abd + acd.$ Разделяем правую часть уравнения на левую получим:

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} => 1 = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_5 x}$$

$$<=> 1 = \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5 = \log_x(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) => x = 120$$

Так как x=1 является корнем уравнения, то

Ответ: $\{1; 120\}$

Задание №4

Сделаем линейную замену:

$Y = y + 2, X = x - 3.$ Тогда в новой системе координат (x, y) имеем уравнение: $|X| + |Y| = 4$, т.е. симметрия по X и по У. А тогда имеем квадрат с диагоналями 8. Его площадь равно 32.

Ответ: 32

Задание №5

Умножая обе части уравнения на 2 и, группируя слагаемые, получим

$$2x^2 + 2y^2 = 2 + 2y + 2xy => (x - y)^2 + (y - 1)^2 + x^2 = 3.$$

Слева имеем сумму квадратов трех целых чисел эта сумма равняется 3. Это возможно только, если $(x, y) \in \{0, \pm 1, \pm 2]$ при $x = 0$ получим

$$y^2 - y - 1 = 0$$

Это уравнение не имеет целых решений. Пусть $y = 0$, тогда $x^2 = 1$, т.е. имеем два решения: $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. При $x = 1$ находим

$$(1 - y)^2 \cdot 2 = 2$$

Отсюда $y = 0$ или $y = 2.$ Имеем новое решение: $(1; 2)$. При $x = \pm 2$ очевидно решений нет. Также решений не будет при $y = -1$. И наконец при $y = 2$ имеем $(x - 1)^2 = 0, x = 1$, т.е. имеем решение (1;2).

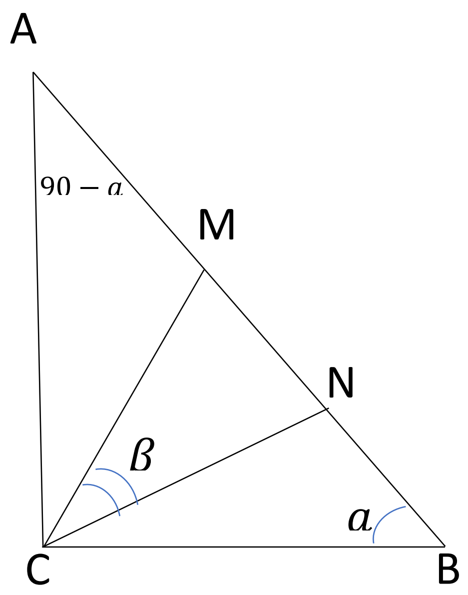
Ответ: $(1; 0), (-1; 0), (1; 2)$

Задание №6

Пусть $\text{arcctg}2 = \alpha$, $\text{arcctg}3 = \beta$. По свойствам функции $arctgx$ углы $\alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$. Воспользуемся формулой $ctg(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha\text{ctg}\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta}$. Тогда $\text{ctg}(\text{arcctg}\alpha + \text{arcctg}\beta) = \frac{2\cdot 3 - 1}{2+3} = 1$. Отсюда

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задание №7



Пусть ABC прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, BM=BC, AC=AN

Решение

Пусть $\angle B = \alpha$, искомый угол обозначим β

Имеем:

$\angle CNA = \angle \text{ACN} = 45° + \frac{a}{2}$. Далее

$\angle CMB = 90°$ - $\frac{a}{2}$, $\angle BCM = 90° - \frac{a}{2}$.

Тогда

$$\angle CNB = 180° - \angle \text{CNA} = 135 - \frac{a}{2},$$

$$\angle NCB = 180° - a - 135° + \frac{a}{2} = 45° - \frac{a}{2}.$$

А тогда $\beta = 90° - \frac{a}{2} - 45° + \frac{a}{2} = 45°$

Ответ: 45°

Задание №8

ОДЗ$x > 0$. По свойству логарифма это равносильно неравенству $2^{x^2}\cdot x \geq 2^{1+2x} = 2\cdot 2^{2x}$. Деля обе части неравенства 2^{2x}, получим:

$$2^{x^2-2x} \geq \frac{2}{x} <=> 2^{(x-1)^2-1} \geq \frac{2}{x} <=> 2^{(x-1)^2} \geq \frac{4}{x}.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < x < 1$ функция $2^{(x-1)^2}$будет убывающей, а при $x \geq 1$ – возрастающей функция $y = \frac{4}{x}$ на промежутке (0; ∞) убывающая при $x = 2$ эти две функции равны. Поэтому ответ будет: $x \geq 2$

Задание №9

Имеем:

$$|x - 9a^2| + |6a - 3| \leq 2$$

Как известно, $|x - \mathrm{a}|$ это расстояние от точки x до точки a. Рассмотрим точки на числовой прямой $6a - 3$ и $9a^2$ расстояние между этими точками равно $|9a^2 - 6\mathrm{a} + 3| = (3\mathrm{a} - 1)^2 + 2$, т.е. всегда больше или равно 2. Слева стоит сумма расстояний т. x должна лежать на промежутке от $6a - 3$ до $9a^2$. Чтобы неравенство имело решение нужно чтобы $\mathrm{a} = \frac{1}{3}$ и тогда $x \in [-1; 1]$ будет решением. В других случаях x (при $\mathrm{a} \neq \frac{1}{3}$) решений нет.

Ответ: при $\mathrm{a} \neq \frac{1}{3}$ решений нет. При $\mathrm{a} = \frac{1}{3}, -1 \leq \mathrm{x} \leq 1$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
11 классы

Вариант 3

Задание №1

Пусть скорость встречного поезда x м/сек. Скорость поезда, в котором ехал пассажир, $40\frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{100}{9}\frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Встречный поезд за 3 сек прошел расстояние 3x метров, а поезд с пассажирами - $3 \cdot \frac{100}{9} = 33\frac{1}{3}$ метра. Всего оба поезда прошли по условию 75 м, следовательно $33\frac{1}{3} + 3x = 75$ м, отсюда $x = 13\frac{8}{9}\frac{\text{м}}{\text{сек}} = \frac{125*3600}{9*1000} = 50$ км/час.

Ответ: 50 км/час

Задание №2

Имеем: $\sqrt{3}\ln 2$ v $\sqrt{2}\ln 3 <=> \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ v $\frac{\ln 3}{\ln\sqrt{2}} = \log_2 3$. Далее: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \frac{5}{4}$ так как очевидно, что $1{,}5 < (\frac{5}{4})^2 = 1{,}5625$. Покажем, что $\log_2 3 > \frac{5}{4}$. Действительно: сравнивая числа 3 и $2^{5/4}$ получим, что $3^4 > 2^5$. Поэтому первое число меньше второго.

Задание №3

Очевидно, что $x = 1$ будет решением этого уравнения. Обозначим: $\log_2 x = a$, $\log_4 x = в$, $\log_6 x = c$, тогда: $авс = ав + ас + вс$.

Деля уравнение на авс, получим: $1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{в} + \frac{1}{a} <=> 1 = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_6 x} = \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 6 = \log_x 48$. Отсюда $x = 48$.

Ответ: $\{1; 48\}$

Задание №4

Сделаем замену: $y - 1 = Y$, тогда $|x| + |y| \le 4$. В системе координат (x,Y) указанная область будет симметрична относительно x и Y и представляет область, ограниченную квадратом с диагоналями, равными 8. Поэтому площадь фигуры будет $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$

Задание №5

ОДЗ $x > 0$; Имеем: $x^{2-(\log_2 x)^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1}$. Возможны два случая: Когда x>1, то $2 - (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x < -1$; Если $x > +1$, то получим $2 - (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x > -1$. Обозначим $\log_2 x = a$. Тогда либо $a^2 + 2a - 3 > 0$, либо $a^2 + 2a - 3 < 0$. Решая эти неравенства в соответствующих областях, получим ответ.

Ответ: $\mathbf{0} < x < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}; \mathbf{1} < x < \mathbf{2}$

Задание №6

Обозначим $\alpha = arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$.

Тогда

$$tg\alpha = tg(arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.$$

Так как углы $arctg\frac{1}{2}$ и $arctg\frac{1}{3}$ меньше $\frac{\pi}{4}$ то, так как $tg\alpha = 1$, то сумма этих углов равна $\frac{\pi}{4}$.

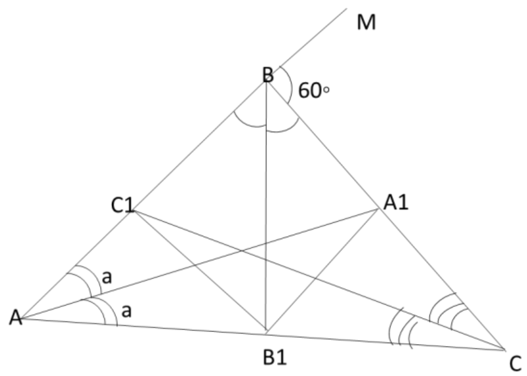
Ответ: $\frac{\pi}{4}$

Задание №7

Умножая равенство на 2, получим: $2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y = 0.$ Следовательно: $(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$=2. Так как x и y – целые числа, а правая часть равенства равна 2, то равенство возможно лишь о трех случаях: (0;0), (0;1), (1;0). Проверка показывает, что эти числа будут решениями уравнения. А других нет.

Ответ: (0;0), (0;1), (1;0)

Задание №8



Пусть ABC данный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы.

Решение:

Заметим, что BA_1 – биссектриса смежного с углом ABB_1 ($\angle B_1BA_1$ = $=\angle A_1BM = 60°$), а AA_1 биссектриса угла AB и BB_1, а также от прямых AB и AC, т.е. точка A_1 равноудалена от прямых BB_1 и B_1C, т.е. B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C. Точно также C_1B_1 биссектриса угла BB_1A. Таким образом, $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1B_1B + \angle BB_1A = \frac{1}{2}(\angle AB_1B + \angle BB_1C) = 90°$.

Ответ: 90°

Задание №9

Как известно, $|x - x_0|$ есть расстояние т. x от точки x_0. Переписав данное неравенство в виде: $|x - 4a^2| + |x - (12a - 12)| \leq 3$, мы отметим на числовой прямой точки $4a^2$ и $12a - 12$. Расстояние между этими точками будет равно: $4(a-\frac{3}{2})^2+3$, т.е. больше или равно 3. А тогда исходное неравенство будет выполняться лишь при $a=3/2$. В этом случае решение будет 6$\leq x \leq 9$. Для других а решений нет.

Ответ: $a=3/2$ $x\epsilon[6;9]$. При других а решений нет.